International Science Journal of Engineering & Agriculture
2024; 3(1): 50-60
https://isg-journal.com/isjea
doi: 10.46299/j.isjea.20240301.06
ISSN: 2720-6319

INTERNATIONAL SCIENCE GROUP

Аналіз напруженого стану шару що спирається на два циліндричних врізаних шарніра

Олександр Юрійович Деньщиков
кафедра міцності літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», м. Харків,Україна
ORCID: 0009-0008-2385-5841

Віталій Юрійович Мірошніков
кафедра міцності літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», м. Харків,Україна
ORCID: 0000-0002-9491-0181

Для цитування цієї статті:
Деньщиков Олександр Юрійович, Мірошніков Віталій Юрійович. Аналіз напруженого стану шару що спирається на два циліндричних врізаних шарніра. International Science Journal of Engineering & Agriculture. Vol. 3, No. 1, 2024, pp. 50-60. doi: 10.46299/j.isjea.20240301.06
Надійшла до редакції: 02 січня 2024 р.; **Схвалено:** 31 січня 2024 р.;
Опубліковано: 01 лютого 2024 р.

Анотація: Розрахункові схеми, в яких умови закріплення можуть бути промодельовані як циліндричні шарніри є одні з найпоширеніших у машино та авіабудуванні. Однак точні методи розрахунку для таких схем при заданих умовах контактного типу відсутні. Через це створення алгоритму для вирішення таких задач є актуальним. Дана робота присвячена моделюванню нескінченного шару, що спирається на два циліндричних врізаних шарніри які паралельні горизонтальним поверхням шару та один одному. Шарніри представлені як циліндричні порожнини із заданими умовами контактного типу (нормальні переміщення та дотичні напруження уздовж поверхні порожнини дорівнюють нулю). На поверхнях шару напруження вважаються відомими. Застосовано два типу систем координат: декартова для шару та циліндрична – для порожнин. Граничні умови застосовуються до рівняння Ламе. За допомогою узагальненого методу Фур'є задача зведена до розв'язання системи нескінчених лінійних алгебраїчних рівнянь, яка вирішена методом редукції. Чисельне дослідження проведене з точністю виконання граничних умов 10^{-3} для значень напружень від 0 до 1 при четвертому порядку системи рівнянь. Аналіз напруженого стану проведений для опорних частин шару та верхньої межі шару. Виконано порівняння з результатами дослідження для аналогічної задачи з жорстким закріпленням опор. Відмічено, що окружні напруження в шарі уздовж поверхні, що контактує з циліндричним шарніром, при закріпленні контактного типу у порівнянні з жорстким закріпленням має протилежний знак, що може бути суттевим для матеріалів з різними характеристиками на розтяг-стискання. Отриманий метод може бути використаний для аналізу напружено-деформованого стану болтового чи заклепочного з'єднання в якому під час експлуатації змінився момент затягання і з'єднання з жорсткого перетворилось на шарнірне.

Ключові слова: шар з циліндричними порожнинами, узагальнений метод Фур'є, умови контактного типу

1. Вступ

Задача визначення напружено-деформованого стану є однією з найбільш важливих при проектуванні машин та механізмів в різних галузях авіа та машинобудування. При цьому тип опор у вигляді циліндричних шарнірів є найбільш розповсюдженим.

Найбільш раціональним підходом до моделювання циліндричного шарніру є представлення його у вигляді порожнини або включення з заданими умовами контактного типу.

Літературний пошук показує велику кількість робіт де розглядається шар з циліндричною порожниною або включенням які перпендикулярні до поверхонь шару [1 – 5]. Так у роботі [1] побудовано хвильове поле нескінченного пружного шару, ослабленого циліндричною порожниною. Умови закріплення – ідеальний контакт уздовж верхньої та нижньої поверхонь шару. Зовнішнє навантаження - розтягуюча сила прикладена до поверхні циліндричної порожнини в початковий момент часу. Робота [2] має аналогічну постановку задачі, з додатковою умовою жорсткого закріплення нижньої поверхні шару. Підхід у розв'язанні задачі в роботах [1, 2] також аналогічний – за допомогою інтегральних перетворень Лапласа та інтегрального методу Фур'є. Ці методи застосовано до граничних умов і осесиметричних рівнянь руху, які створюють одновимірну векторну неоднорідну крайову задачу. Недоліком методів, використаних в роботах [1, 2], є неможливість ефективного вирішення задач з декількома граничними поверхнями. Таким чином, вони можуть бути застосовані лише до вирішення задач дифракції хвиль.

Розробці та застосуванню загального аналітичного рішення для функціонально градуйованих (FG) композитних ламінованих пластин із круглими вирізами за різних умов навантаження в площині присвячена робота [3]. Надійність і точність запропонованого аналітичного рішення встановлюється шляхом порівняння його результатів з аналітичними результатами, отриманими за допомогою методу комплексної змінної та методом скінчених елементів.

Робота [4] присвячена знаходженню оптимального розподілу термічних напружень у симетричних композитних пластинах з некруглими отворами під дією рівномірного теплового потоку. Знайдено аналітичне рішення для ламінованих пластин з композиту з круглими отворами, яке потім за допомогою функції відображення розповсюджене на пластину з некруглими отворами. Для аналізу напружень були застосовані генетичний алгоритм (GA), алгоритм гравітаційного пошуку (GSA) і алгоритм Bat (BA). На жаль вищеназвані методи методи також є наближеними що не гарантує точність кінцевого результату.

В роботі [5] за допомогою інтегральних перетворень Вебера-Орра розглянуто кручення пружного півпростору з вертикальною циліндричною порожниною коаксіальним штампом, що обертається під дією крутного моменту навколо осі. В роботі запропоновано два нові методи зведення задачі до регулярних інтегральних рівнянь другого роду, що дозволило отримати майже точний розв'язок задачі для всіх значень параметрів.

Загальним недоліком усіх вищезгаданих робот [1 – 5] є те, що вони розроблені для вирішення задач з поперечним розташуванням порожнини або включення, і без дуже суттєвого доопрацювання їх не можна використати для розв'язання задачі для шару з поздовжніми циліндричними порожнинами.

Інший підхід до розв'язання задач для шару, що має повздовжнє контактне спирання це застосування чисельних методів та методів будівельної механіки. Аналіз існуючих робіт показав, що в більшості робот використовувався метод скінчених елементів [6, 7]. Прикладом таких робіт є дослідження [8] де за допомогою методу скінчених елементів проведено аналіз напружено-деформованого стану півпростору, підкріпленого плитою. Значна відмінність в постановці задачі даного дослідження є вертикальне розташування армованої оболонки циліндричної порожнини. Недоліком даного класу методів є те, що при використанні методів будівельної механіки вони допускають суттєве змінення моделі, метод скінченних елементів є

наближеним, не враховує нескінчені границі тіла та суттєво залежить від точності і розмірів побудови сітки. Тому дані методи не гарантують точність та адекватність результатів [9].

Застосування методів, що використовуються для розрахунку композитних матеріалів [10 – 13], дозволяє врахувати нелінійність моделі. Циліндричні шарнірні опори при цьому можливо моделювати у вигляді абсолютно жорстких елементів. Дослідження [10] присвячено визначенню напружено-деформованого стану під дією поздовжньої динамічної сили, прикладеної до одного з двох з'єднаних внахльост стрижнів різної довжини. Для моделювання з'єднання використовувалась модель клейового з'єднання Голанда-Рейснера. Напружено деформований стан при поперечному ударі розглянуто в роботі [11]. Предметом дослідження при цьому виступали багатошарові конструкції до яких прикладено динамічне навантаження. Рішення було отримано за допомогою теорії двовимірної дискретної структури, при цьому вектор переміщень кожного шару був представлений у вигляді степеневого ряду. Крім теоретичних проводилися експериментальні дослідження, які підтвердили коректність результатів. Також дослідженню ударного навантаження присвячена робота [12], в якій створено метод оцінки міцності багатошарового склопакету при зіткненні з птахом. Крім того, в роботі оцінювалася величина надлишкового тиску під час ударного навантаження на багатошаровий склопакет. В роботі [13] проведено дослідження термонапруженого стану багатошарового склопакету. При цьому термічне навантаження промодельоване у вигляді міжшарових плівкових джерел тепла, а склопакет розглянуто як незамкнута циліндрична багатошарова оболонка постійної товщини.

Суттєвим недоліком даного класу методів є неможливість врахування циліндричних опор (нульових переміщень в зонах контакту з циліндричними шарнірами).

Застосування аналітико-числового узагальненого методу Фур'є [14] є найбільш ефективним для врахування поздовжніх неоднорідностей в шарі. Цей метод дозволяє отримувати розв'язок рівняння Ламе для системи тіл, в якій використовується декілька локальних систем координат різних типів одночасно. Використовуючи даний метод отримано напружено – деформований стан в пружному циліндрі з циліндричними порожнинами [15, 16] або циліндричними включеннями [17], а також для півпростору зі сфероїдальною порожниною [18]. При цьому використовувались локальні циліндричні системи координат та формули переходу базисних рішень між ними. Для шару зі сфероїдальною порожниною використовувалась декартова система координат та сфероїдальна.

Формули переходу між декартовою та циліндричною системою координат застосовані для півпростору з циліндричною порожниною в роботі [19], для шару з однією циліндричною порожниною в роботах [20, 21], для шару з суцільним циліндричним включенням в роботі [22], а також для шару з циліндричною товстостінною трубою в роботі [23].

Загальним недоліком робіт [19–23] є те, що в них не застосовуються формули переходу між локальними циліндричними системами координат. Даний недолік не дозволяє розв'язувати задачі з декількома циліндричними неоднорідностями.

В подальшому розвитку робіт [19–23] була розв'язана задача для шару з двома суцільними циліндричними включеннями [24], але в даному випадку включення не можуть розглядатися як опори. В роботі [25] розв'язана задача визначення напружено деформованого стану в шарі з двома циліндричними врізаними та жорстко поєднаними з шаром опорами. Але в цій роботі на поверхнях порожнин застосовується граничні умови у вигляді переміщень, що не дозволяє використовувати їх для вирішення задач з умовами контактного типу.

В той же час при створенні розрахункових схем машинобудівних та авіаційних конструкцій часто застосовується схема, де шар спирається на два та більше циліндричних шарніри. Розв'язок задачі знаходження напружень за допомогою аналітико-чисельних високоточних методів (наприклад узагальненого методу Фур'є), як показана вище, не розглядався раніше.

Таким чином, задача розв'язку задач контактного типу для шару, що спирається на два циліндричних шарніри за допомогою узагальненого методу Фур'є є актуальною.

2. Постановка задачі

Пружний однорідний шар розташований на двох циліндричних врізаних в нього шарнірах. Ці шарніри було представлено у розрахунковій схемі як порожнини із заданими на них умовами контактного типу (рис.1). Радіуси порожнин позначені Rp, де p – номер порожнини.

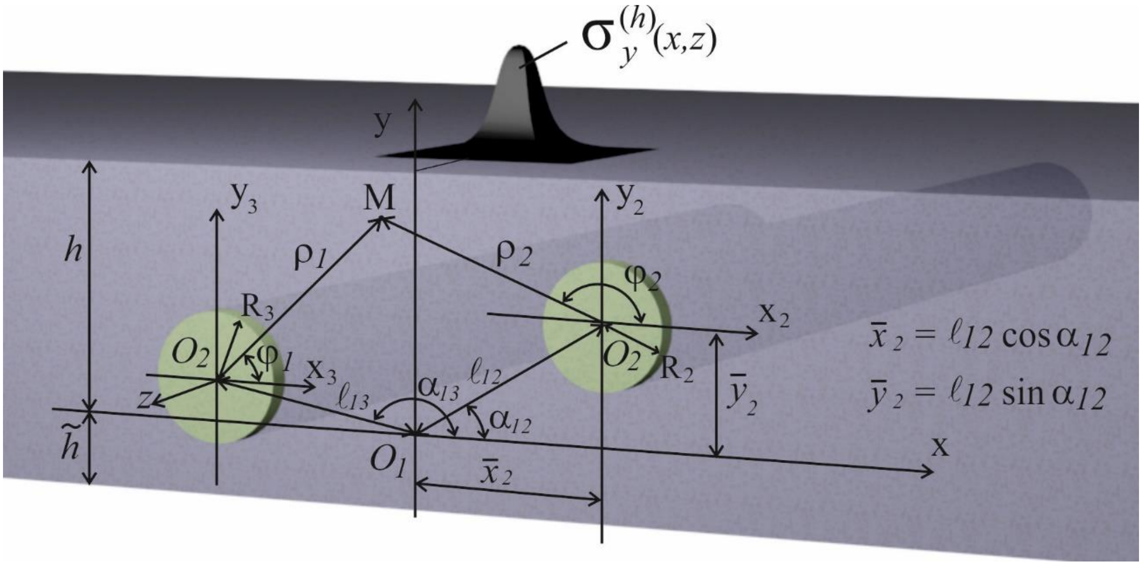


Рис. 1. Шар з двома врізаними циліндричними опорами.

Локальна система координат для шара - декартова (x, y, z), для порожнин - циліндрична (ρ_p, φ_p, z). Відстань до верхньої та нижньої меж шару відповідно $y = h$ та $y = -\tilde{h}$.

При вирішенні задачі знайдено розв’язок рівняння Ламе:

$$\Delta\vec{u} + (1-2\sigma)^{-1}\nabla div\vec{u} = 0.$$

На верхній та нижній межах шару задано напруження, відповідно $F\vec{U}(x,z)_{|y=h} = \vec{F}_h^0(x,z)$, $F\vec{U}(x,z)_{|y=-\tilde{h}} = \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x,z)$,

де $\vec{U}$ – переміщення в шарі;

$F\vec{U} = 2 \cdot G \cdot \left[\frac{\sigma}{1-2\cdot\sigma}\vec{n} \cdot div\vec{U} + \frac{\partial}{\partial n}\vec{U} + \frac{1}{2}\left(\vec{n} \times rot\vec{U}\right)\right]$ – оператор напруження;

$$\vec{F}_h^0(x,z) = \tau_{yx}^{(h)}\vec{e}_x + \sigma_y^{(h)}\vec{e}_y + \tau_{yz}^{(h)}\vec{e}_z, \tag{1}$$

$$\vec{F}_{\tilde{h}}^0(x,z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})}\vec{e}_x + \sigma_y^{(\tilde{h})}\vec{e}_y + \tau_{yz}^{(\tilde{h})}\vec{e}_z \tag{2}$$

– відомі функції.

На поверхнях порожнин $p = 1$, $p = 2$ задані нормальні переміщення та дотичні напруження

$$\left.\begin{aligned} &U_\rho(\phi_p, z)_{|\rho=R_p} = U_0^{(p)}(\phi_p, z), \\ &\tau_{\rho\phi|\rho_p=R_p} = \tau_1^{(p)}(\phi_p, z), \\ &\tau_{\rho z|\rho_p=R_p} = \tau_2^{(p)}(\phi_p, z) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Всі задані функції прийнято вважати швидко спадаючими від початку координат по осі z и x для шару та осі z для порожнин.

3. Метод розв'язання

Базисні розв'язки рівняння Ламе для декартових і циліндричних систем координат було взято у вигляді описаному в роботі [14]:

$$\vec{u}_k^{\pm}(x,y,z;\lambda,\mu) = N_k^{(d)} e^{i(\lambda z+\mu x)\pm\gamma y};$$
$$\vec{R}_{k,m}(\rho,\phi,z;\lambda) = N_k^{(p)} I_m(\lambda\rho) e^{i(\lambda z+m\phi)};$$
$$\vec{S}_{k,m}(\rho,\phi,z;\lambda) = N_k^{(p)}\left[(sign\,\lambda)^m K_m(|\lambda|\rho)\cdot e^{i(\lambda z+m\phi)}\right]; k=1,2,3; \quad (4)$$
$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda}\nabla;\ N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda}(\sigma-1)\vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda}\nabla(y\,\cdot);\ N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} rot\left(\vec{e}_3^{(1)}\,\cdot\right);$$
$$N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda}\nabla;\ N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda}\left[\nabla\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + 4(\sigma-1)\left(\nabla - \vec{e}_3^{(2)}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right];$$
$$N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} rot\left(\vec{e}_3^{(2)}\,\cdot\right);\ \gamma=\sqrt{\lambda^2+\mu^2},\ -\infty<\lambda,\mu<\infty,$$

де $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя; $\vec{R}_{k,m}$, $\vec{S}_{k,m}$ – внутрішні й зовнішні розв'язки рівняння Ламе для циліндру відповідно; $\vec{u}_k^{(-)}$, $\vec{u}_k^{(+)}$ – розв'язки рівняння Ламе для шару; σ – коефіцієнт Пуассона.

Розв'язання задачі представлено у вигляді запропонованому в роботі [25]:

$$\vec{U} = \sum_{p=1}^{2}\sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda)\cdot\vec{S}_{k,m}\left(\rho_p,\phi_p,z;\lambda\right)d\lambda +$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(H_k(\lambda,\mu)\cdot\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu) + \tilde{H}_k(\lambda,\mu)\cdot\vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)\right)d\mu d\lambda, \quad (5)$$

де $\vec{S}_{k,m}\left(\rho_p,\phi_p,z;\lambda\right)$, $\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ і $\vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ – базисні розв'язки, задані формулами (4), а невідомі функції $H_k(\lambda,\mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda,\mu)$, $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ знайдені з граничних умов (1) - (3).

Перехід між базисними розв'язками в різних системах координат було здійснено за допомогою формул отриманих в роботі [14]:

- для переходу від базисних розв'язків $\vec{S}_{k,m}$ циліндричної системи координат до розв'язків шару $\vec{u}_k^{(-)}$ (при y>0) і $\vec{u}_k^{(+)}$ (при y<0)

$$\vec{S}_{k,m}\left(\rho_p,\phi_p,z;\lambda\right) = \frac{(-i)^m}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{\mp}^{m}\cdot e^{-i\mu\bar{x}_p\pm\gamma\bar{y}_p}\cdot\vec{u}_k^{(\mp)}\cdot\frac{d\mu}{\gamma},\ k=1,\ 3;$$
$$\vec{S}_{2,m}\left(\rho_p,\phi_p,z;\lambda\right) = \frac{(-i)^m}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_{\mp}^{m}\cdot\left(\left(\pm m\cdot\mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} \pm \lambda^2\bar{y}_p\right)\vec{u}_1^{(\mp)} \mp \lambda^2\vec{u}_2^{(\mp)} \pm\right.$$
$$\left.\pm 4\mu(1-\sigma)\vec{u}_3^{(\mp)}\right)\cdot\frac{e^{-i\mu\bar{x}_p\pm\gamma\bar{y}_p}d\mu}{\gamma^2}, \quad (6)$$

де $\gamma=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$, $\omega_{\mp}(\lambda,\mu) = \frac{\mu\mp\gamma}{\lambda}$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$;

- для переходу від базисних розв'язків $\vec{u}_k^{(+)}$ і $\vec{u}_k^{(-)}$ шару до розв'язків $\vec{R}_{k,m}$ циліндричної системи координат

$$\vec{u}_k^{(\pm)}(x,y,z) = e^{i\mu\bar{x}_p\pm\gamma\bar{y}_p}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}(i\cdot\omega_{\mp})^m\vec{R}_{k,m},\ (k=1,\ 3);$$

$$\vec{u}_2^{(\pm)}(x,y,z) = e^{i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big[(i\cdot\omega_{\mp})^m \cdot \lambda^{-2}\Big(\big(m\cdot\mu + \bar{y}_p\cdot\lambda^2\big)\cdot\vec{R}_{1,m} \pm$$

$$\pm\gamma\cdot\vec{R}_{2,m} + 4\mu(1-\sigma)\vec{R}_{3,m}\Big)\Big] \quad , \qquad (7)$$

де

$$\vec{R}_{k,m} = \vec{\tilde{b}}_{k,m}(\rho_p,\lambda)\cdot e^{i(m\phi_p+\lambda z)};\ \vec{\tilde{b}}_{1,n}(\rho,\lambda) = \vec{e}_\rho\cdot I_n'(\lambda\rho) + i\cdot I_n(\lambda\rho)\cdot\Big(\vec{e}_\phi\frac{n}{\lambda\rho} + \vec{e}_z\Big);$$

$$\vec{\tilde{b}}_{2,n}(\rho,\lambda) = \vec{e}_\rho\cdot[(4\sigma-3)\cdot I'_n(\lambda\rho) + \lambda\rho I''_n(\lambda\rho)] + \vec{e}_\phi i\cdot m\left(I'_n(\lambda\rho) + \frac{4(\sigma-1)}{\lambda\rho}I_n(\lambda\rho)\right) +$$

$$+\vec{e}_z i\lambda\rho I'_n(\lambda\rho);$$

$$\vec{\tilde{b}}_{3,n}(\rho,\lambda) = -\Big[\vec{e}_\rho\cdot I_n(\lambda\rho)\frac{n}{\lambda\rho} + \vec{e}_\phi\cdot i\cdot I_n'(\lambda\rho)\Big];$$

$\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$, $\vec{e}_z$ – орти в циліндричній системі координат;

- для переходу від базисних розв'язків циліндру з номером p до розв'язків циліндру з номером q

$$\vec{S}_{k,m}(\rho_p,\phi_p,z;\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\vec{b}_{k,pq}^{mn}(\rho_q)\cdot e^{i(n\phi_q+\lambda z)}, k = 1,\ \ 2,\ \ 3;$$

$$\vec{b}_{1,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n\tilde{K}_{m-n}(\lambda\ell_{pq})\cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}}\cdot\vec{\tilde{b}}_{1,n}(\rho_q,\lambda);$$
$$\vec{b}_{3,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n\tilde{K}_{m-n}(\lambda\ell_{pq})\cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}}\cdot\vec{\tilde{b}}_{3,n}(\rho_q,\lambda); \qquad (8)$$
$$\vec{b}_{2,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n\Big\{\tilde{K}_{m-n}(\lambda\ell_{pq})\cdot\vec{\tilde{b}}_{2,n}(\rho_q,\lambda) - \frac{\lambda}{2}\ell_{pq}\cdot$$
$$\cdot\big[\tilde{K}_{m-n+1}(\lambda\ell_{pq}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda\ell_{pq})\big]\cdot\vec{\tilde{b}}_{1,n}(\rho_q,\lambda)\Big\}\cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}},$$

де α_{pq} – кут між віссю x_p та відрізком ℓ_{qp}, $\tilde{K}_m(x) = \big(sign(x)\big)^m\cdot K_m(|x|)$.

Для врахування граничних умов на верхній та нижній межах шару застосовано оператор напруження для правої частини функції (5). Отриманий вектор дорівнює при $y = h$ заданому $\vec{F}_h^0(x,z)$, а при $y = -\tilde{h}$ заданому $\vec{F}_{\tilde{h}}^0(x,z)$, які попередньо представлені через подвійний інтеграл Фур'є.

Для базисних розв'язків $\vec{S}_{k,m}(\rho_p,\phi_p,z;\lambda)$ застосовано формули переходу (6), представивши їх у декартовій системі координат через базисні розв'язки $\vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ при $y = h$ і $\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ при $y = -\tilde{h}$. Після врахування граничних умов на верхній і нижній поверхнях шару отримано шість рівнянь (по одному на кожну проекцію) з 12-ма невідомими $H_k(\lambda,\mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda,\mu)$, $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$.

Із цієї системи рівнянь знайдено $H_k(\lambda,\mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda,\mu)$ через $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$.

Для врахування граничних умов контактного типу на циліндрах, праву частину (5), за допомогою формул переходу (6) та (7), було представлено в локальній циліндричній системі координат кожної порожнини через базисні розв'язки $\vec{R}_{k,m}$, $\vec{S}_{k,m}$. Після цього до цих базисних розв'язків, при $k = 2$ та $k = 3$, було застосовано оператор напруження. Отриманий вектор, при $\rho_p = R_p$, прирівняно заданим (3), представленим через ряд та інтеграл Фур'є. Таким чином, отримано додатково ще шість рівнянь які задовольняють граничним умовам на поверхні циліндричних шарнірів.

У результаті для кожного циліндра отримано по три нескінчених системи лінійних інтегро-алгебраїчних рівняння відносно $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$, які містять $H_k(\lambda,\mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda,\mu)$. Після

виключення з цих рівнянь знайдених раніше $H_k(\lambda,\mu)$ і $\widetilde{H}_k(\lambda,\mu)$ через $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ та звільнення їх від рядів по m і інтегралів по λ, отримано 6 нескінчених лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду для визначення невідомих $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$.

Знайдені невідомі $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ підставлено у вираз для $H_k(\lambda,\mu)$ і $\widetilde{H}_k(\lambda,\mu)$.

Таким чином під час розв'язку задачі було знайдено всі невідомі виразу (5).

До отриманих нескінченних систем рівнянь застосований метод редукції. Точність виконання граничних умов при чисельному дослідженні показали високу збіжність розв'язання цієї системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

4. Чисельні дослідження напруженого стану

У пружному ізотропному шарі (рис.1) розташовано дві циліндричні порожнини. Коефіцієнт Пуассона шару (ABS пластик) σ = 0,38, модуль пружності E = 1700 Н/мм^2. Геометричні параметри моделі: $R_2 = R_3$ = 5 мм, h = 12 мм, $\tilde{h}$= 12 мм, α_{12} = 0, α_{13}= π. Відстань до порожнин $L_{12} = L_{13}$ = 30 мм.

На верхній межі шару задано нормальні напруження у вигляді одиничної хвилі $\sigma_y^{(h)}(x,z) = -10^8 \cdot (z^2+10^2)^{-2} \cdot (x^2+10^2)^{-2}$ і нульові дотичні напруження $\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$, на нижній межі шару задано напруження, що дорівнюють нулю: $\sigma_y^{(\tilde{h})}(x,z) = \tau_{yx}^{(\tilde{h})}(x,z) = \tau_{yz}^{(\tilde{h})}(x,z) = 0$.

Нескінчена система була зрізана по параметру *m=4* (кількість членів ряду Фур'є і порядок системи рівнянь).

Обчислення інтегралів виконано квадратурними формулами Філона. Точність виконання граничних умов при зазначених m і заданих геометричних параметрах не менше ніж 10^{-4} при значеннях від 0 до 1. Це відповідає роботі [20], в якій проведений ґрунтовний аналіз збіжності ров'язків відносно різних значень m для шару з порожнинами.

Отримані результати наведені на рисунках 2- 5. Для порівняння та аналізу результатів на рисунки також додано графіки які було надані в роботі [25] для аналогічної задачі з жорстким закріпленням опор. Ці лінії позначені цифрою 1. Усі геометричні розміри, параметри матеріалу та завнішні навантаження, для коректності порівнянь, взяті однаковими.

На рис. 2 наведено графік розподілення нормальних напружень уздовж верхньої та нижньої меж шару при z=0, де σ_y - задані напруження, а σ_x напруження, що виникають під дією зовнішнього навантаження.

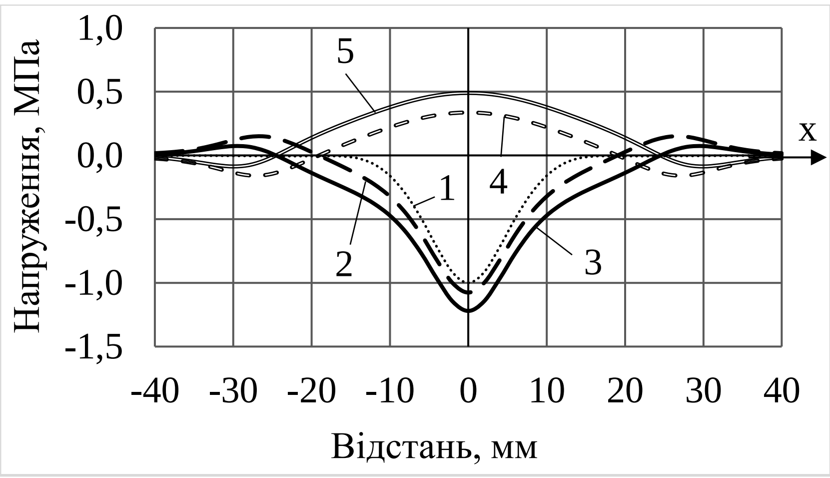


Рис. 2. Напруження на верхній і нижній поверхнях шару: 1 – задані σ_y; 2 – σ_x на верхній межі при жорсткому закріпленні опор; 3 – σ_x на верхній межі при закріпленні контактного типу; 4 – σ_x на нижній межі при жорсткому закріпленні опор; 5 – σ_x на нижній межі при закріпленні контактного типу.

Як видно з графіків: зміна умов закріплення не впливає на характер розподілення напружень. Величини максимальних значень на верхній поверхні шару (лінії 2 та 3 на рис. 2) відрізняються приблизно на 13%.

На рис. 3 зображено напружень σ_ρ, σ_ϕ та σ_z на поверхні опори, розташованої праворуч (p = 1) при z=0.

Як видно з графіків, характер розподілення напружень σ_ρ та σ_z для жорсткого закріплення та закріплення контактного типу також аналогічний. В той же час значання максимальних величин напружень для шару, який розташований на опорах з закріпленням контактного типу більші більш ніж вдвічі.



а



б



в

а – напруження σ_ρ; *б* – напруженняσ_ϕ; *в* – напруженняσ_z

Рис. 3. Напруження на поверхні порожнини p = 1.

В той же час напруження σ_ϕ при закріпленні контактного типу у порівнянні з жорстким закріпленням має протилежний знак (дивись рис.3*б*), що може бути суттевим для матеріалів з різними характеристиками на розтяг-стискання, так як що дана модель може бути використана як модель болтового чи заклепочного з'єднання в якому під час експлуатації змінився момент затягання і з'єднання з жорсткого перетворилось на шарнірне.

5. Висновки

В роботі розв'язана задача теорії пружності для шару розташованого на двох кругових циліндричних врізаних в нього опорах. Опори представлені у вигляді циліндричних порожнин з умовами контактного типу на їх поверхнях. Задачу розв'язано за допомогою аналітико-числового узагальненого методу Фур'є. При цьому розв'язок виконаний за допомогою зведення задачі до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка дозволяє застосувати до неї методу редукції. Чисельні дослідження показали високу точність виконання граничних умов, що слугує додатковим підтвердженням точності розрахуннків.

Представлений порівняльний аналіз з результатами дослідження в якому використовувались інші умови закріпленння показує, що зміна умов з жорсткого закріплення на закріплення контактного типу значним чином впливає на величину і знак напруженого стану тіла.

В роботі представлено метод, що дозволяє отримати напружено-деформований стан для нескінченного шару, що спирається на два циліндричних врізаних шарніри які паралельні горизонтальним поверхням шару та один одному. В подальших дослідженнях планується модифікація даного методу для збільшення кількості опор та врахування можливих циліндричні неоднорідностей між опорами.

Список літератури:

1) Fesenko, A., Vaysfel'd, N. (2019). The Wave Field of a Layer with a Cylindrical Cavity. In: Gdoutos, E. (eds) Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. ICTAEM 2019. Corfu, Greece, June 23-26, 2019. Structural Integrity, 8, 277–282. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_51

2) Fesenko, A., Vaysfel'd, N. (2021). The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity. Procedia Structural Integrity, 33, 509-527

3) Khechai, A., Belarbi, M.O., Bouaziz, A. et al. (2023). A general analytical solution of stresses around circular holes in functionally graded plates under various in-plane loading conditions. Acta Mech, 234, 671–691. doi: https://doi.org/10.1007/s00707-022-03413-1

4) Jafari, M., Bayati C., Khoramishad, H., Altenbach, H. (2022). Minimization of thermal stress in perforated composite plate using metaheuristic algorithms WOA, SCA and GA. Composite Structures, 304, 116403. doi: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116403.

5) Malits, P. (2021). Torsion of an elastic half-space with a cylindrical cavity by a punch. European Journal of Mechanics - A/Solids, 89, 104308. doi: https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104308

6) Tekkaya, A.E., Soyarslan, C. (2014). Finite Element Method. Encyclopedia of Production Engineering. Berlin: Springer, 508–514. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-20617-7_16699

7) Карвацький А. Я. (2018). Метод скінченних елементів у задачах механіки суцільних середовищ. Лабораторний практикум з навчальної дисципліни. Навч. посіб. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 391

8) Zasovenko, A., Fasoliak, A. (2023). Mathematical modeling of the dynamics of an elastic half-medium with a cylindrical cavity reinforced by a shell under axisymmetric loads. New Materials and Technologies in Metallurgy and Mechanical Engineering, 2, 67–73

9) Азаров А.Д., Журавлев Г.А., Пискунов А.С. (2015). Сравнительный анализ аналитического и численного методов решения плоской задачи о контакте упругих цилиндров. Инновационная наука. 1-2, 5–13

10) Smetankina, N., Kurennov, S., Barakhov K. (2023). Dynamic Stresses in the Adhesive Joint. The Goland-Reissner Model. International Conference on Reliable Systems Engineering, 762, 456–468

11) Ugrimov, S., Smetankina, N., Kravchenko, O., Yareshchenko, V., Kruszka, L. A. (2021). Study of the Dynamic Response of Materials and Multilayer Structures to Shock Loads. Advances in Mechanical and Power Engineering . CAMPE 2021. Kharkiv, Ukraine, October 18-21. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham, 304–313. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_31

12) Smetankina, N., Kravchenko, I., Merculov, V., Ivchenko, D., Malykhina, A. (2020). Modelling of Bird Strike on an Aircraft Glazing. Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering. Series “Advances in Intelligent Systems and Computing”, 1113, 289-297. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-37618-5_25

13) Smetankina, N., Merkulova, A., Merkulov, D., Misiura, S., Misiura, I. (2023). Modelling Thermal Stresses in Laminated Aircraft Elements of a Complex Form with Account of Heat Sources. In: Cioboată, D.D. (eds) International Conference on Reliable Systems Engineering (ICoRSE). Bucharest, Romania, September 7-8, 2022. ICoRSE 2022. Lecture Notes in Networks and Systems, 534, 233–246. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-031-15944-2_22

14) Николаев А. Г., Проценко В. С. (2011). Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 344

15) Nikolaev A. G., Tanchik E. A. (2015). The first boundary-value problem of the elasticity theory for a cylinder with N cylindrical cavities. Numerical Analysis and Applications, 8, 148–158

16) Nikolaev A. G., Tanchik E. A. (2016). Stresses in an elastic cylinder with cylindrical cavities forming a hexagonal structure. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 57, 1141–1149

17) Nikolaev A. G., Tanchik E. A. (2016). Model of the Stress State of a Unidirectional Composite with Cylindrical Fibers Forming a Tetragonal Structure. Mechanics of Composite Materials, 52, 177–188

18) Николаев А. Г., Орлов Е. М. (2012). Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью. Проблеми обчисл. механіки і міцності конструкцій, 20, 253 – 259

19) Ukrayinets, N., Murahovska, O., Prokhorova, O. (2021). Solving a One Mixed Problem in Elasticity Theory for Half-space With a Cy-lindrical Cavity by the Generalized Fourier Method. East.-Eur. J. Enterp. Technol, 2, 48–57. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.229428

20) Miroshnikov V. Y. (2020). Stress State of an Elastic Layer with a Cylindrical Cavity on a Rigid Foundation. International Applied Mechanics, 56(3), 372–381

21) Vitaly, M. (2023). Rotation of the Layer with the Cylindrical Pipe Around the Rigid Cylinder. Advances in Mechanical and Power Engineering . CAMPE 2021. Kharkiv, Ukraine, October 18 - 21, 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Cham: Springer, 314–322. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_32

22) Miroshnikov V.Y., Medvedeva A.V., & Oleshkevich S.V. (2019). Determination of the stress state of the layer with a cylindrical elastic inclusion. Materials Science Forum, 968, 413–420

23) Miroshnikov, V. (2019). Investigation of the Stress Strain State of the Layer with a Longitudinal Cylindrical Thick-Walled Tube and the Displacements Given at the Boundaries of the Layer. Problemy Mashynobuduvannia – Journal of Mechanical Engineering, 22 (2), 44-52. doi: https://doi.org/10.15407/pmach2019.02.044

24) Miroshnikov V. Yu. , Savin O. B. , Hrebennikov M. M., Pohrebniak O. A. (2022). Analysis of the stress state of a layer with two cylindrical elastic inclusions and mixed boundary conditions.

Problemy Mashynobuduvannia – Journal of Mechanical Engineering, 25(2), 22-29. doi: https://doi.org/10.15407/pmach2022.02.022

25) Miroshnikov, V. Yu., Savin, O. B., Hrebennikov, M. M., & Demenko, V. F. (2023). Analysis of the stress state for a layer with two incut cylindrical supports. Problemy Mashynobuduvannia – Journal of Mechanical Engineering, 26 (1), 15–22. doi: https://doi.org/10.15407/pmach2023.01.015

Analysis of the stress state of a layer supported by two cylindrical swivel joints

Oleksandr Denshchykov
Department of Aircraft Strength, National Aerospace University "KHAI", Kharkiv, Ukraine
ORCID: 0009-0008-2385-5841

Vitaly Miroshnikov
Department of Aircraft Strength, National Aerospace University "KHAI", Kharkiv, Ukraine
ORCID: 0000-0002-9491-0181

Abstract: Free body diagrams in which connections can be modeled as cylindrical swivel joints are among the most common in machine and aircraft engineering. However, there are no exact calculation methods for such schemes under given contact type conditions. Because of this, the creation of an algorithm for solving such problems is actual goal. The current investigation is devoted to the modeling of an infinite layer supported by two cylindrical swivel joints with parallel horizontal layer surfaces and each other. The swivel joints are represented as cylindrical cavities with specified contact type conditions (normal displacements and tangential stresses along the surface of the cavity are equal to zero). The stresses on the surfaces of the layer are assumed to be known. Two types of coordinate systems are used: Cartesian for the layer and cylindrical for cavities. Boundary conditions are applied to the Lamé equation. Using the generalized Fourier method, the problem is reduced to solving a system of infinite linear algebraic equations, which is solved by the reduction method. The numerical study was carried out with the accuracy of fulfilling the boundary conditions 10-3 for stress values from 0 to 1 at the fourth order of the system of equations. The analysis of the stress state was carried out for the supporting parts of the layer and the upper boundary of the layer. A comparison was made with the results of the study for a similar task with fixed supports. It was noted that the circumferential stresses in the layer along the surface in contact with the swivel joint, when the contact type is fastened, compared to the rigid fastening, has the opposite sign, which can be essential for materials with different tensile-compressive characteristics. The current method can be used to analyze the stress-strain state of a bolted or riveted connection in which the tightening moment changed during operation and the connection turned from rigid to hinged.

Keywords: layer with cylindrical cavities, generalized Fourier method, contact-type conditions.
